QUELQUES NOTES SUR LES MATRICES

Définition

Une matrice est un tableau (à deux dimensions) de nombres (les éléments) ordonnés. Elle est notée $[A]$.

Elément d'une matrice

Par convention, on note a_{ij} l'élément situé à la $i^{\text{-ème}}$ ligne et $j^{\text{-ème}}$ colonne.

Ordre d'une matrice

Une matrice qui possède m lignes et n colonnes est dite d'ordre $(m \times n)$. Une matrice carrée sera simplement d'ordre n.

Une matrice est dite

- **Nulle** : si tous ses éléments sont nuls
- **Carrée** : si le nombre de colonnes est égal au nombre de lignes
- **Diagonale** : si elle est nulle à l'exception des termes sur la diagonale
- **Unité** : si elle est diagonale et tous les éléments non nuls sont égaux à 1
- **Symétrique** : si on a $a_{ij} = a_{ji}$
- **Orthogonale** : si $[A]^{-1} = [A]'$
- **Idempotente** : si $[A]^2 = [A]$
- **Positive définie** : si $[X]' \cdot [A] \cdot [X] > 0$ pour tout vecteur $[X]$; ses valeurs propres sont > 0
  $\Rightarrow [A]$ n'est pas singulière, $a_{ii} > 0$, $a_{ij}^2 < a_{ii} \cdot a_{jj}$, $\max (a_{jk}) \leq \max (a_{ii})$

Produit de deux matrices

$$[A]\ (m \times n) \cdot [B]\ (n \times p) = [C]\ (m \times p) \qquad C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \qquad 1 \leq i \leq m \qquad 1 \leq k \leq p$$

Le produit n'est possible que si : nombre de colonnes de $[A]$ = nombre de lignes de $[B]$
Nombre de lignes de $[C]$ = nombre de lignes de $[A]$
Nombre de colonnes de $[C]$ = nombre de colonnes de $[B]$

Propriétés :

- $[A] \cdot ([B] \cdot [C]) = ([A] \cdot [B]) \cdot [C]$
- $[A] \cdot ([B] + [C]) = [A] \cdot [B] + [A] \cdot [C]$

Transposée

Notation : $[A]'$

Par définition : $a_{ij}' = a_{ji}$

Propriétés :

- $([A] \cdot [B])' = [B]' \cdot [A]'$
- $(k \cdot [A])' = k \cdot [A]'$
- $([A]')^{-1} = ([A]^{-1})'$
- $([A] + [B])' = [A]' + [B]'$
- $([A] \cdot [B] \cdot [C])' = [C]' \cdot [B]' \cdot [A]'$

Au sujet du produit $[A] \cdot [A]'$:

- Si $[A]$ est d'ordre $(m \times n)$ et si toutes les lignes et colonnes sont linéairement indépendantes, on a :

$$\text{rang}([A]) = \min(m, n)$$

- Le produit $[P_1] = [A]' \cdot [A]$ est une matrice carrée de dimensions $(n \times n)$. Son rang est égal au rang de $[A]$.

- Le produit $[P_2] = [A] \cdot [A]'$ est une matrice carrée de dimensions $(m \times m)$. Son rang est toujours égal au rang de $[A]$.

- Autrement dit :

  - si $\text{rang}([A]) = n$, alors $\det([P_1]) \neq 0$ et $[P_1]$ est inversible alors que $[P_2]$ ne l'est pas
  - si $\text{rang}([A]) = m$, alors c'est $[P_2]$ qui est inversible et $\det([P_2]) \neq 0$.

Déterminant

Notation : $\det([A])$

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n se calcule de manière récursive :

- $\det[A] = a_{11}$ si $[A]$ est de dimension (1×1)
- $\det[A] = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det\left[A_{(-i-1)}\right]$ si $[A]$ est de dimension $(n \times n)$; $n > 1$

$\left[A_{(-i-1)}\right]$ = matrice obtenue en supprimant la $1^{\text{-ère}}$ colonne et la $i^{\text{-ème}}$ ligne (= mineur)

Exemples :

Si $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ alors $\det[A] = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Si $[A] = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

On multiplie chaque terme par le mineur du terme qui le précède.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments de la diagonale.

- Le déterminant se calcule avantageusement par une décomposition en deux matrices triangulaires (décomposition LU).

- Une matrice est régulière si $\det [A] \neq 0$, singulière dans le cas contraire (autrement dit, une matrice carrée d'ordre n est régulière si son rang est égal à n).

- Si $[A]$ est orthogonale, $\det ([A])$ vaut ± 1.

Propriétés :

- $\det [A] = \det [A]'$
- $\det ([A] \cdot [B]) = \det ([A]) \cdot \det ([B])$
- $\det ([A]^{-1}) = 1 / \det [A]$

Mineur

C'est le déterminant de la matrice dont on a enlevé une ligne et une colonne.

Inverse

Notation : $[A]^{-1}$

- Une matrice est inversible si et si seulement il existe $[A]^{-1}$ tel que : $[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = 1$

- Si $\det [A] = 0$, la matrice est singulière et elle ne peut être inversée.

- $[A]^{-1}$ est unique

- Une matrice dont une ligne est une combinaison linéaire d'une ou plusieurs autres ne peut être inversée. Idem pour les colonnes. En effet, dans ces deux cas, le rang de $[A]$ est inférieur à n.

Propriétés :

- Associatif
- Non commutatif
- $([A]^{-1})^{-1} = [A]$
- $([A]')^{-1} = ([A]^{-1})'$
- $([A] \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot [A]^{-1}$
- $([A] \cdot [B] \cdot [C])^{-1} = [C]^{-1} \cdot [B]^{-1} \cdot [A]^{-1}$

Rang

Le rang d'une matrice est l'ordre du plus grand mineur non nul de la matrice (ce qui revient à dire : soit k le nombre de lignes linéairement indépendantes et l le nombre de colonnes linéairement indépendantes, alors le $R = \min(k, l)$).

En d'autres termes, une matrice a le rang R si :

- il y a au moins un mineur d'ordre R différent de zéro
- tous les mineurs de $[A]$ d'ordre $R + 1$ et plus, sont nuls

- Si la matrice est carrée et que le rang est égal au nombre de lignes, la matrice est régulière (son déterminant est non nul et elle est inversible), sinon elle est singulière.

- Le rang d'une matrice nulle est admis être zéro.

- La différence entre le rang de la matrice et le plus petit des nombres m et n se nomme la nullité de la matrice (ou déficience de rang).

- Le rang d'une matrice est souvent égal à $\min(m, n)$; dans ce cas, aucune ligne ou colonne n'est une combinaison linéaire d'une ou plusieurs autres lignes, respectivement, colonnes.

<u>*Propriétés*</u> : :

- $\text{rang}([A]') = \text{rang}([A]) = \text{rang}([A]' \cdot [A]) = \text{rang}([A] \cdot [A]')$
- $\text{rang}([A] \cdot [B]) \leq \text{rang}([A]);\quad \text{rang}([B] \cdot [A]) \leq \text{rang}([B])$
- $\text{rang}([A] \cdot [B]) = \min(\text{rang}([A]), \text{rang}([B])$

Pour déterminer le rang d'une matrice, on peut pratiquer ainsi :

1. On part des mineurs de petits ordres (en commençant par le mineur d'ordre 1, c'est-à-dire avec les éléments de la matrice) en allant aux mineurs d'ordre plus important

2. On suppose que l'on trouve un mineur D non nul d'ordre R, alors on doit seulement calculer les mineurs d'ordre $(R + 1)$ qui encadrent le mineur D. Si tous les mineurs sont nuls, alors le rang de la matrice est R; mais si un d'entre eux est non nul, alors cette opération doit appliquée à lui.

<u>*Exemple*</u> :

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Il existe au moins un mineur d'ordre 2 différent de zéro :

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 0 \qquad D_2 = \det\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

et le mineur du 3[ème] ordre qui le borde est : $D_3 = \det\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

et tous les mineurs du 4ème ordre qui bordent D_3 sont nuls :

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{et} \qquad \det\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

Ainsi le rang de la matrice est 3 et la nullité est $4 - 3 = 1$.

Une méthode robuste

Elle consiste à déterminer les valeurs singulières de la matrice $[A]$. Le rang de $[A]$ est égal au nombre de valeurs singulières non-nulles.

Valeurs propres

Soit $[A]$ une matrice carrée d'ordre n. Les valeurs propres λ sont solutions de :

$$[A] \cdot [X] = \lambda \cdot [X] \qquad [X] = \text{vecteur propre}$$

Ce sont aussi les racines de l'équation : $\det([A] - \lambda \cdot [1]) = 0$

Il y a au plus n valeurs propres.

Valeurs singulières

Les valeurs singulières de $[A]$ sont égales à la racine carrée positive des valeurs propres de $[A]' . [A]$. Pour les déterminer avec un minimum de calculs, on choisit $[A]' . [A]$ si le nombre de lignes de $[A]$ est supérieur au nombre de colonnes et $[A] . [A]'$ dans le cas contraire.

Propriétés :

- La somme des valeurs singulières de $[A]$ est égale à la trace de $[A]$ (= somme des éléments de la diagonale).
- Les valeurs singulières sont ≥ 0.

Pseudo-inverse

Notation : $[A]^+$

La pseudo-inverse de $[A]$ répond à :

de tous les vecteurs $[X]$ qui minimisent la norme de :

$$[X] \cdot [A] - [Y] \quad \text{(= critère des moindres carrés)}$$

celui qui minimise la norme de $[X]$ vaut : $[X] = [A]^+ \cdot [Y]$

Par exemple, $[A]^+$ est l'unique matrice qui satisfait les quatre conditions de Moore-Penrose :

- $[A] \cdot [A]^+ \cdot [A] = [A]$
- $[A]^+ \cdot [A] \cdot [A]^+ = [A]^+$
- $([A] \cdot [A]^+)' = [A] \cdot [A]^+$
- $([A]^+ \cdot [A])' = [A]^+ \cdot [A]$

La matrice pseudo-inverse satisfait encore :

- $([A]^+)^+ = [A]$
- $([A]^+)' = ([A]')^+$
- $(\alpha \cdot [A])^+ = \alpha^{-1} \cdot [A]^+$

Si $\text{rang}\,[A] = m$ => $[A] \cdot [A]'$ est inversible et $[A]^+ = [A]' \cdot ([A] \cdot [A]')^{-1}$

Dans ce cas, $[A]^+$ est appelé pseudo-inverse à droite et minimise la norme de $[X]$

Si $\text{rang}\,[A] = n$ => $[A]' \cdot [A]$ est inversible et $[A]^+ = ([A]' \cdot [A])^{-1} \cdot [A]'$

Dans ce cas, $[A]^+$ est appelé pseudo-inverse à gauche et donne la solution des moindres carrés

Si $\text{rang}\,([A]) = m = n$, alors $[A]^+ = [A]^{-1}$.

Par comparaison, $[A]^{-1}$ est l'unique matrice qui satisfait :

- $[A] \cdot [A]^{-1} = [1]$
- $[A]^{-1} \cdot [A] = [1]$

alors que si $\text{rang}\,[A]$ = nombre de lignes de $[A]$ alors :

- $[A]^+ \cdot [A] \neq [1]$
- $[A] \cdot [A]^+ = [1] \quad (m \times m)$

et si $\text{rang}\,[A]$ = nombre de colonnes de $[A]$ alors

- $[A]^+ \cdot [A] = [1] \quad (n \times n)$
- $[A] \cdot [A]^+ \neq [1]$

<u>Notes</u> :

- $\text{rang}\,([A]^+) = \text{rang}\,[A] = \text{rang}\,([A])' = \text{rang}\,([A]^+) \cdot [A] = \text{rang}\,([A] \cdot [A]^+)$
- $[A] \cdot [A]^+$ et $[A]^+ \cdot [A]$ sont symétriques
- Si le rang de $[A]$ est inférieur à $\min\,(m, n)$, il existe d'autres méthodes (= décomposition SVD). De même, si $[A] \cdot [A]'$ est proche d'une matrice singulière, le calcul à l'aide de la décomposition SVD est préférable, car plus stable.

Décomposition LU

Décompose une matrice en un produit de deux matrices triangulaires, une inférieure, l'autre supérieure :

$$[A]=[L]\cdot[U]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

- Le déterminant de $[A]$ vaut $u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$

Décomposition SVD (Singular Value Decomposition)

Décompose une matrice en un produit de trois matrices : $[A] = ([U] \cdot [S] \cdot [V]')$

- $[U]$ et $[V]$ sont des matrices orthogonales
- $[U]$ $(m \times m)$ est la matrice des vecteurs propres de $[A] \cdot [A]'$, avec $[U]' \cdot [U] = [1]$
- $[V]$ $(n \times n)$ est la matrice des vecteurs propres de $[A]' \cdot [A]$, avec $[V]' \cdot [V] = [1]$
- $[S]$ est une matrice diagonale $(m \times n)$ dont les termes s_{ii} sont ≥ 0; ce sont les valeurs singulières de $[A]$. Le rang de $[A]$ est égal au nombre de termes $s_{ii} \neq 0$. Le reste de la matrice est complété par des zéros.
- Si $[A]$ est régulière, tous les S_{ii} sont > 0 et dans ce cas, on peut calculer la matrice inverse par :

  $$[A]^{-1} = ([U] \cdot [S] \cdot [V]')^{-1} = ([V]')^{-1} \cdot [S]^{-1} \cdot [U]^{-1} = [V] \cdot \mathrm{diag}\,(1 / s_{ii}) \cdot [U]'$$

  avec $\mathrm{diag}\,(1 / s_{ii})$ = matrice diagonale dont les termes valent $1 / s_{ii}$
- Si $[A]$ est singulière, on peut calculer la pseudo-inverse de $[A]$:

  $$[A]^{+} = [V] \cdot [S]^{+} \cdot [U]'$$

- $[S]^{+}$ est une matrice d'ordre $(n \times m)$ dont tous les termes sont nuls, sauf les s_{ii}^{+} tels que $i \leq n$ et $s_{ii} \neq 0$; ils valent alors $1 / s_{ii}$.
- Du fait des multiplication par 0 qui apparaissent dans le cas général, il existe une décomposition "économique" qui donne naissance à des matrices de dimensions plus restreintes, pour autant que $m > n$; dans ce cas : $[U]$ $(m \times n)$, $[S]$ $(n \times n)$ et $[V]$ $(n \times n)$.

Exemple avec Matlab :

```
% Avec une matrice rectangulaire
    A=[3 4 -2 5;2 -3 -2 1; -4 2 1 -3]
    rank(A)
    [U,S,V]=svd(A)
    %     [U,S,V]=svd(A,0)   si on souhaite faire la décomposition "économique"
```

% Calcul de $[S]^+$

```
    [m,n]=size(A)
    for I=1:1:m
       for J=1:1:n
          S1(J,I)=0;
       end
    end
    for I=1:1:min(n,m)
       S1(I,I)=1/S(I,I);
    end
```

% La vérification est correcte :

```
    Verif_Pseudo=pinv(A)-V*S1*U'
    clear U S V
```

% Avec une matrice carrée

```
    B=A(1:3,1:3)
    [U,S,V]=svd(B);
    for I=1:1:3
       S(I,I)=1.0/S(I,I);
    end
```

% La vérification est correcte :

```
    Verif_Inv=inv(B)-V*S*U'
```

Système d'équations linéaires

Il se met sous la forme : $[A] \cdot [X] = [Y]$

$[A] : (m \times n)$
$[X] : (n \times 1)$
$[Y] : (m \times 1)$

Le système d'équations est compatible si : $\text{rang } [A] = \text{rang } [A \;\; Y]$

$[A \;\; Y]$ désigne la matrice augmentée $(m \times n + 1)$

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Compatible</td><td colspan="2">Incompatible</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\text{rang }([A]) = n$</td><td>$\text{rang }([A]) < n$</td><td>$\text{rang }([A]) = n$</td><td>$\text{rang }([A]) < n$</td></tr>
<tr><td>$m < n$</td><td>Sous-déterminé</td><td colspan="2">Il existe une infinité de solutions. On peut obtenir une solution de norme minimale par :
$[X_{min}] = [A]^+ \cdot [Y]$</td><td colspan="2">Aucune solution ne peut satisfaire l'ensemble des équations. Une solution de norme minimale au problème des moindres carrés peut être trouvée par la pseudo-inverse
$[X_{LSmin}] = [A]^+ \cdot [Y]$</td></tr>
<tr><td>$m = n$</td><td>Carré</td><td>Il existe une solution unique qui est obtenue par :
$[X] = [A]^{-1} \cdot [Y]$</td><td>Il existe une infinité de solution. On se trouve dans le cas d'un système sous-déterminé compatible
$[X_{min}] = [A]^+ \cdot [Y]$</td><td colspan="2">Aucune solution ne peut satisfaire l'ensemble des équations. On se trouve dans le cas d'un système sous-déterminé incompatible
$[X_{LSmin}] = [A]^+ \cdot [Y]$</td></tr>
<tr><td>$m > n$</td><td>Sur-déterminé</td><td>La suppression des équations linéairement dépendantes nous ramène au cas d'un système carré
$[X] = [A]^{-1} \cdot [Y]$</td><td>Il existe une infinité de solution. On se trouve dans le cas d'un système sous-déterminé compatible
$[X_{min}] = [A]^+ \cdot [Y]$</td><td>Aucune solution ne peut satisfaire l'ensemble des équations. Il existe une solution au sens des moindres carrés
$[X_{LS}] = ([A]' \cdot [A])^{-1} \cdot [A]' \cdot [Y]$</td><td>Il existe plusieurs solutions au sens des moindres carrés. Le vecteur de norme minimal est fourni par :
$[X_{LSmin}] = [A]^+ \cdot [Y]$</td></tr>
</table>

Avec :

- $[X]$: solution "habituelle" (solution d'un système de n équations à n inconnues)
- $[X_{min}]$: solution de norme minimale
- $[X_{LS}]$: solution au sens des moindres carrés

Remarque : si la matrice est carrée, d'ordre n et de rang n, on a : $[A]^+ = [A]^{-1}$. Dès lors, le système d'équations :

$$[A] \cdot [X] = [Y]$$

admet toujours une solution du genre : $[X] = [A]^+ \cdot [Y]$

Par contre, la solution obtenue n'a pas, dans tous les cas, la même signification !

Exemple :

Soit une balance à m composantes et n capteurs.

Soit $[F]$ la matrice colonne des efforts appliqués et $[S]$ celle des effets mesurés. Elles sont liées par la matrice "statique" $[S] = [\alpha] \cdot [F]$. L'objectif de l'étalonnage est la détermination de la matrice d'étalonnage $[A]$ telle que :

$$[F] = [A] \cdot [S]$$

Si la balance est déterminée ($m = n$), il est évident que $[A] = [\alpha]^{-1}$.

Dans le cas où $m \neq n$, on a $[A] = [\alpha]^+$, avec une signification différente selon les cas.

Exemple dans le cas où $m < n$ (balance indéterminée)

$$S_1 = a_{11} \cdot F_1 + a_{12} \cdot F_2 + a_{13} \cdot F_3$$
$$S_2 = a_{21} \cdot F_1 + a_{22} \cdot F_2 + a_{23} \cdot F_3 \qquad m = 2 \text{ et } n = 3$$

Le système est sous-déterminé (on a deux équations pour déterminer les trois forces). Il y a donc une infinité de solutions. La pseudo-inverse permet de déterminer la solution de norme minimum (= celle qui minimise la norme de $[F]$).

Soit $[\alpha] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ et $[F] = \begin{bmatrix} 23 \\ 38 \\ 45 \end{bmatrix}$

On peut déterminer : $[S] = [\alpha] \cdot [F] = \begin{bmatrix} 612 \\ 469 \end{bmatrix}$ et $[A] = [\alpha]^+ = \begin{bmatrix} -0.356 & 0.514 \\ 0.183 & -0.158 \\ 0.139 & -0.085 \end{bmatrix}$

Et : $[F] = [A] \cdot [S] = \begin{bmatrix} 23 \\ 38 \\ 45 \end{bmatrix}$ ce qui est numériquement correct, mais n'a pas de sens physique.

Exemple dans le cas où $m > n$ (balance hyperstatique)

$$S_1 = a_{11} \cdot F_1 + a_{12} \cdot F_2$$
$$S_2 = a_{21} \cdot F_1 + a_{22} \cdot F_2 \qquad m = 3 \text{ et } n = 2$$
$$S_3 = a_{31} \cdot F_1 + a_{32} \cdot F_2$$

Le système est sur-déterminé (on a trois équations pour déterminer les deux forces). Si une des équation est une combinaison linéaire des deux autres, on l'élimine et on trouve dans le cas de la balance déterminée. Dans le cas contraire, il n'y a pas de solution qui satisfasse toutes les équations. La pseudo-inverse permet de déterminer la solution qui donne la meilleure approximation au sens des moindres carrés.

Soit $[\alpha] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ et $[F] = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

On peut déterminer : $[S] = \begin{bmatrix} 38 \\ 24 \\ 40 \end{bmatrix}$ et $[A] = [\alpha]^+ = \begin{bmatrix} -0.432 & -0.136 & 0.642 \\ 0.420 & 0.160 & -0.395 \end{bmatrix}$

Et : $[F] = [A] \cdot [S] = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, ce qui est correct et correspond à une approximation "au mieux" au sens des moindres carrés.

Quelques notes sur les moindres carrés

Cas de la régression linéaire multiple

Le modèle se met sous la forme :

$$[Y] = [X] \cdot [A]$$

Attention au changement de notation !

- $[Y]$ = vecteur des valeurs mesurées (variables expliquées)
- $[X]$ = matrice (n lignes et p+1 colonnes) des expériences (variables explicatives)
- $[A]$ = vecteur des paramètres (ce que l'on cherche à déterminer)

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}; \quad [Y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix}$$

Le modèle possède p paramètres donnés par :

$$\boxed{[A] = [B] \cdot [U]}$$

avec $[B] = \left([X]' \cdot [X]\right)^{-1}$ et $[U] = [X]' \cdot [Y]$

Avec Matlab

Si $[X]$ est une matrice $(m \times n)$, avec $m > n$ et de rang plein $(r = n)$, alors les trois formes suivantes sont équivalentes et déterminent la même solution $[A]$ des moindres carrés :

- $[A] = [X] \backslash [Y]$
- $[A] = [X]^{+} \cdot [Y]$
- $[A] = ([X]' \cdot [X])^{-1} \cdot [X]' \cdot [Y]$

Si $[X]$ a plus de lignes que de colonnes et qu'il n'est pas de rang plein, alors le problème sur-déterminé des moindres carrés qui consiste à minimiser la norme de $([X] \cdot [A] - [Y])$ n'a pas de solution unique.

Deux solutions, parmi l'infinité de solutions possibles sont :

- $[A] = [X] \backslash [Y]$ est la solution de base; elle a le moins possible de composantes non nulles. Elle en possède au moins r, quand r est le rang de $[X]$.

- $[A] = [X]^{+} \cdot [Y]$ détermine la solution de norme minimale. Elle minimise aussi $norme([A])$

Le calcul avec $([X]' \cdot [X])^{-1} \cdot [X]' \cdot [Y]$ n'est pas possible car $([X]' \cdot [X])^{-1}$ n'est pas inversible

Table des matières